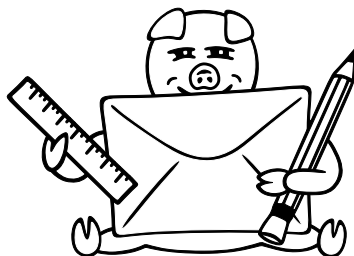


Matematický Korespondenční Seminář



„PraSe“ (PRAŽský SEminář)

1. podzimní série

Téma: Hry a soutěže

Datum odeslání: 3. ŘÍJNA 2011

1. ÚLOHA (3 BODY)

Znuděný π tr si hází mincí. Vždy, když mu padne panna, jeden bod si přičte, naopak když padne orel, jeden bod ztrácí. Kolik bodů může mít po 17 hodech, pokud na začátku neměl žádné? Nalezněte všechny možnosti a ukažte, že jiné nejsou.

2. ÚLOHA (3 BODY)

Každý ze šesti bratrů hodil kostkou a každému padlo jiné číslo. Přitom Adam hodil dvakrát víc než Bedřich, Cyril dokonce třikrát víc než Bedřich a David třikrát víc než Emil. Kolik padlo Filipovi?

3. ÚLOHA (3 BODY)

Po svých prvních pěti utkáních na mistrovství světa v koulené měl Miškův tým skóre vstřelených a obdržených branek 5:3. Kolikrát nejvíce a kolikrát nejméně mohl vyhrát? Své tvrzení podpořte i příkladem, jak mohly jednotlivé zápasy dopadnout.

4. ÚLOHA (5 BODŮ)

Alča a Háňa hrají hru, na začátku níž si Háňa vymyslí dvojciferné přirozené číslo. V každém tahu pak Alča poví Háňe nějaké přirozené číslo $d > 1$. Pokud je d dělitelem Háňina čísla, Alča vyhrává. V opačném případě Háňa odečte číslo d od svého čísla a hra pokračuje dalším Alčíným tahem. Jakmile Háňa dostane záporné číslo, Alča prohraje. Poradte Alče, jak má hrát, aby vždy vyhrála.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)

Kenny, Olin a Šavlík hráli fotbal, přičemž jeden z nich byl vždy brankář a zbylí dva útočili. Ten, kdo vstřelil branku, šel na následující hru do brány. Později Vejtkovi prozradili, že Kenny útočil 12 her, Olin 21 her a Šavlík bránil 8 her, z čehož Vejtek ihned bystře poznal, kdo vstřelil šestou branku. Kdo to byl?



6. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Vojenskou základnu obývají tři seržanti a několik vojinů. Seržanti se po dnech střídají ve službě. Od generála dostali následující instrukce:

- (i) Každý den musí alespoň jeden vojin dostat rozkaz.
- (ii) Žádný vojin nesmí za celou dobu dostat více než dva rozkazy, přitom během jednoho dne může dostat rozkaz nejvýše jeden.
- (iii) Seznam vojinů, jimž byl během dne udělen rozkaz, nesmí být pro žádné dva různé dny stejný.
- (iv) První seržant, který tyto instrukce během svého dne nenaplní, bude poslán do vězení.

Všichni seržanti vědí, kteří vojini dostali ve kterých dnech rozkaz. Dokáže některý z nich (bez toho, aby spolupracoval s ostatními dvěma) udílet rozkazy tak, aby se vězení jistě vyhnul?

7. ÚLOHA

(5 BODŮ)

Do tenisového turnaje se přihlásilo 2^n soutěžících. V každém kole se všichni ještě nevypadlí hráči rozdělí do dvojic a odehrají zápas. Vítězové postupují do dalšího kola, poražení vypadávají. Na konci turnaje, když zůstane pouze jediný hráč, je potřeba vytvořit výsledkovou listinu, ve které nikdo nesmí být na horší pozici než hráč, kterého porazil. Kolika způsoby je možné takové pořadí vytvořit, pokud žádní dva hráči nesmí skončit na stejné příčce?

8. ÚLOHA

(5 BODŮ)

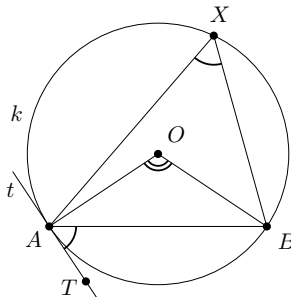
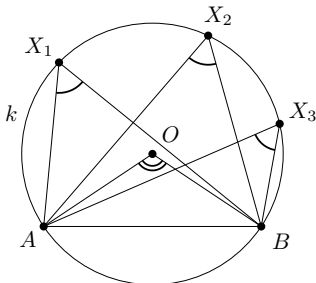
Kdesi v čtverci o straně 10 sedí neviditelná blecha. Ač ji Pepa nevidí, hraje s ní hru. Ve svém n -tém tahu nakreslí přímkou a blecha poposkočí libovolným směrem o $\frac{1}{n}$ tak, aby neopustila čtverec a nepřeskočila žádnou z již nakreslených přímek. Pepa vyhraje, pokud blecha nemá kam skočit. Dokáže Pepa vyhrát nezávisle na tom, kde blecha začíná a jak skáče?

Povídání ke druhé podzimní sérii

Aby se Ti druhá série řešila snáze, připravili jsme pro Tebe kratičké povídání, ve kterém shrneme a připomeneme několik faktů, které by se Ti při řešení příkladů mohly hodit.

Věta. (O obvodovém a středovém úhlu) *Nechť k je kružnice se středem O a AB její tětiva. Pak velikost úhlu AXB se nemění, probíhá-li X některý z oblouků kružnice k určených tětivou AB . Navíc je $|\angle AXB| = \frac{1}{2}|\angle AOB|$, kde úhlem AOB rozumíme vnější úhel ve čtyřúhelníku $AXBO$.*

Tvrzení. (Úsekový úhel) *Nechť k je kružnice se středem O a AB její tětiva. Označme t tečnu ke kružnici k vedenou bodem A . Na kružnici k uvažme bod X různý od A i B a na přímce t nalezneme bod T tak, že přímka AB odděluje body X a T . Pak $|\angle AXB| = |\angle TAB|$.*

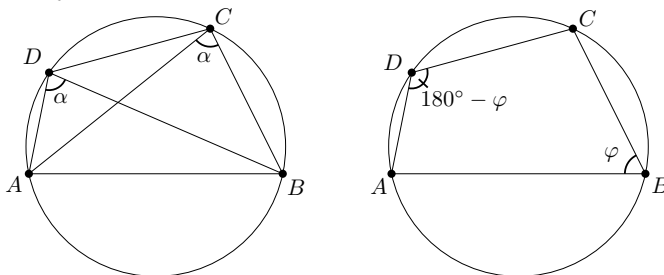


Důkazy věty o obvodovém a středovém úhlu stejně jako důkaz tvrzení o úhlu úsekovém můžeš najít ve středoškolských učebnicích planimetrie. Jejich bezprostředním důsledkem je následující užitečné tvrzení charakterizující *tětivové* čtyřúhelníky (to jsou čtyřúhelníky, jejichž všechny čtyři vrcholy leží na jedné kružnici).

Tvrzení. (Tětivové čtyřúhelníky)

- (i) Jestliže je některá strana čtyřúhelníka $ABCD$ vidět ze zbylých dvou vrcholů pod stejným úhlem, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.
- (ii) Jestliže je některá úhlopříčka čtyřúhelníka $ABCD$ vidět ze zbylých dvou vrcholů pod úhly, jejichž součet je 180° , je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový.

Na druhou stranu v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že každá jeho strana je ze zbylých dvou vrcholů vidět pod stejným úhlem a každá jeho úhlopříčka je ze zbylých dvou vrcholů vidět pod úhly, jejichž součet je 180° .



Pomocí tvrzení o tětivových čtyřúhelnících tak umíme dobře „úhlově“ popsat to, že čtyři body leží na kružnici. Zároveň je mnohdy užitečné tětivový čtyřúhelník v úloze najít – jeho objevením se naše informace o velikostech úhlů v obrázku podstatně rozšíří.

Konečně zmíníme ještě jednu klasickou větu, která rovněž nakládá s velikostmi úhlů.

Věta. (Sinová) V trojúhelníku ABC se standardně značenými velikostmi vnitřních úhlů a poloměrem kružnice opsané R platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

2. podzimní série

Téma:

Úhly

Datum odeslání:

7. LISTOPADU 2011

1. ÚLOHA

(3 BODY)

Tam se vsadil, že dokáže rozdělit pravidelný desetiúhelník na 8 rovnoramenných trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech původního desetiúhelníku, ale teď za boha neví, jak na to. Lze něco takového vůbec provést?

2. ÚLOHA

(3 BODY)

V rovnoběžníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 2$ a $|BC| = 1$ označme M střed strany CD . Ukažte, že $\angle AMB = 90^\circ$.



3. ÚLOHA (3 BODY)
 Lenka si namalovala rovnoramenný trojúhelník ABC a s překvapením zjistila, že na jeho ramenech AB , resp. AC lze najít body P , resp. Q takové, že $|BC| = |CP| = |PQ| = |QA|$. Určete velikost úhlu BAC .

4. ÚLOHA (5 BODŮ)
 Kulečnickový stůl má tvar konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Z bodu K uvnitř strany AB vystřelíme kouli. Ta se postupně odrazí od stran BC , CD a DA (úhel dopadu je roven úhlu odrazu) a znovu dospěje do bodu K z takového směru, že kdyby se v bodě K znovu odrazila, pokračovala by po své původní trase. Ukažte, že vrcholy stolu leží na jedné kružnici.

5. ÚLOHA (5 BODŮ)
 Pepa si nakreslil kruhovou úseč s tětivou AB . Vejtek do obrázku přikreslil kružnici, která se dotýká úsečky AB v jejím vnitřním bodě E a protíná oblouk úseče ve dvou různých bodech C a D tak, že body A , D , C , B leží na úseči v tomto pořadí. Dokažte, že $|\angle ADE| = |\angle ECB|$.

6. ÚLOHA (5 BODŮ)
 Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme A_0 , B_0 paty jeho výšek z vrcholů A , B . Rovnoběžka s AC vedená bodem A_0 protne úsečku AB v bodě K . Rovnoběžka s BC vedená bodem B_0 protne úsečku AB v bodě L různém od K . Ukažte, že $|\angle AA_0L| = |\angle BB_0K|$.

7. ÚLOHA (5 BODŮ)
 To Alča našla na ramenech AB , AC jiného rovnoramenného trojúhelníku ABC pro změnu body K , L takové, že $|KL| = |BK| + |LC|$. Středem M úsečky KL pak vedla přímkou rovnoběžnou s AC a označila N její průsečík se stranou BC . Zjistěte velikost úhlu KNL .

8. ÚLOHA (5 BODŮ)
 Na úhlopříčce AC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ zvolíme bod K tak, že $|KD| = |DC|$, $|\angle BAC| = \frac{1}{2}|\angle KDC|$ a $|\angle DAC| = \frac{1}{2}|\angle KBC|$. Ukažte, že $|\angle KDA| = |\angle KBA|$ nebo $|\angle KDA| = |\angle BCA|$.

Milý příteli!

Vítej mezi námi! Pokud jsi cokoli vyřešil(a), sepiš úlohy každou na **zvláštní papír A4**, nadepiš svým **jménem**, **číslem úlohy** a **číslem série** a do termínu odeslání pošli na adresu uvedenou v záhlaví nebo elektronicky (detaily se dozvíš na našem webu). Nezapomeň svá řešení zdůvodnit. Přilož prosím ještě následující údaje: zpáteční adresu, školu, třídu, zaměření třídy (všeobecné/matematika/fyzika), rok, kdy budeš maturovat, a nejlépe i e-mail a telefon, kteréžto údaje se velmi hodí například v případě pozvání na soustředění nebo řešení nesrovnalostí. Z každé série se Ti započítá pět nejlépe vyřešených úloh, ale neboj se poslat byť i jen jedinou. Ostatní na tom možná nejsou (o moc) lépe.

Co lze řešením získat? Samozřejmě matematický růst, ale dále třeba možnost vyhrát zajímavé ceny nebo jet téměř zdarma na soustředění, kde se setkáš s organizátory a dalšími řešiteli. Od letošního ročníku můžeš navíc mít na základě výsledků v semináři **odpuštěny přijímací zkoušky na MFF UK**, více se dočteš na našich stránkách.

Přejeme vám při zdolávání úloh hromadu invence a řadu spásných nápadů.

Za organizátory Háňa, Olin a Pepa

